

FRACTALII

Nici norii nu sunt sfere, nici munții nu sunt conuri

BARTOLO LUQUE

Traducere de Antonia Călin

CUPRINS

Capitolul 0

Un bestiar al monștrilor autosimilari	7
Mulțimea lui Cantor	9
<i>Cu cât este egal $C + C$?</i>	15
Triunghiul lui Sierpiński	16
Covorul lui Sierpiński	20
<i>Pătratul lui Cantor și buretele lui Menger</i>	22

Capitolul 1

Fractalul: continuu, dar nu derivabil	25
Insula lui Koch	26
<i>Anti-insula lui Koch</i>	28
Funcțiile lui Weierstrass și Takagi	30
<i>Definirea unei funcții ca limită a unei familii de funcții</i>	36
<i>Mișcarea browniană</i>	40

Capitolul 2

Dimensiunea fractală: Poate o curbă să umple spațiul?	43
Curbe care umplu spațiul: Sierpiński, Peano și Hilbert	44
<i>Antene fractale</i>	47
Măsurarea lungimilor și volumelor în fractali	48
<i>Punctele de întrerupere</i>	49
Dimensiunea de autosimilitudine și capacitatea	53
<i>Dimensiunea fractală a fulgului lui Koch</i>	56
<i>Multifractalii</i>	60

Capitolul 3

Iterarea ca sursă a fractalității	63
Sirul meta-Fibonacci: de la Conway la inimile haotice	66
<i>Pescuind biomorfo</i>	70
Radicalii infinit imbricați și fracțiile continue	73
Mulțimea Julia	77
<i>Potențialul continuu</i>	78
Mulțimea lui Mandelbrot	81
<i>Metoda lui Newton</i>	82
<i>Benoît Mandelbrot, părintele geometriei fractale</i>	87
<i>Haos și atractori stranii</i>	89

Capitolul 4

Alte modalități de a genera fractali:

sisteme L și sisteme de funcții iterate	91
<i>Sistemele L și viața artificială</i>	97
Recursivitate și efectul Droste	98
<i>Video-retroacțiune</i>	100
Teorema de punct fix a lui Banach	103
Sisteme de funcții iterate	105
<i>Familia Alcántara</i>	106

Capitolul 5

Natura fractală

Ramificații	115
Legi de scalare: măsurând coasta Marii Britanii	116
<i>Agregare prin difuzie limitată</i>	120
Legi de putere: autosimilitudinea implică raportul de scară	123
Bile de hârtie, dimensiunea masei și numărarea de casete	127
<i>Fractali temporali</i>	128
<i>Lungimea caracteristică</i>	131
<i>Peisaje: munții nu sunt conuri</i>	134

Bibliografie recomandată

137

Capitolul 0

Un bestiar al monștrilor autosimilari

„Când cartea mea Obiectele fractale, în curs de publicare, avea încă titlul de lucru Obiecte concrete cu dimensiunea fracțională, editorul Flammarion a fost îngrozit și a cerut ceva mai bun. Prietenii mei au fost de acord: «Ai scris despre o idee total nouă. Ai dreptul – de fapt, obligația – de a o numi oricum dorești». Să fie captivant. Aș fi putut da un sens nou unui cuvânt vechi, deja supraîncărcat (cum ar fi catastrofă sau haos). Dar am ales să inventez un termen care nu a evocat în mod direct nimic din trecut. Am vrut să transmit ideea unei pietre sparte, a ceva neregulat și fragmentat. Studiile mele din tinerețe mă învățaseră că latina este o limbă. Dicționarul fiului meu Laurent a confirmat că adjectivul fractus înseamnă «rupt» sau «spart». Din acel adjectiv am inventat cuvântul fractal.”

(Benoît Mandelbrot, 1924-2010)

Termenul *fractal* a fost inventat de matematicianul **Benoît Mandelbrot** (1924-2010), în a doua jumătate a secolului XX. De atunci, în ciuda faptului că vorbim despre matematica modernă, popularitatea fractalilor nu a încetat să crească. *Vaca fractală*, a designerilor Gabor Csordas și Gabor Papp, exprimă cu umor ideea populară a fractalului: vaca are creșteri care sunt copii reduse ale ei. Aceste copii, la rândul lor, prezintă pe pielea copii mai mici, care, la rândul lor, sunt pline de vaci care sunt chiar mai mici, care, la rândul lor... Este o vacă, iar acea repetare a întregului, pe multe scări, este ideea extinsă popular despre ceea ce este un fractal.

Intuiția populară este corectă, dar, deși noțiunea de repetare la multe scări este primordială, fractalii ascund multe alte secrete. Primele figuri geometrice pe care le numim fractali astăzi au fost create la sfârșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului XX, pentru a pune sub semnul întrebării sau a rafina întrebările matematice arzătoare de la acea vreme. În acel moment, topologia revedea elementele fundamentale ale analizei; astfel, matematicienii căutau

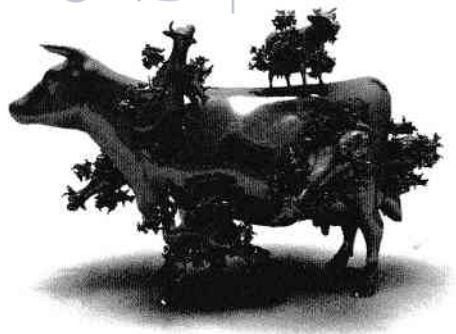


Figura 1. *Vaca fractală*
(2006), de Gabor Csordas
și Gabor Papp.

să formalizeze concepte precum infinit, curbă continuă și dimensiune, și explorând această *terra incognita* au dat peste dragoni și alte creaturi fantastice. Mulți dintre acești „monștri geometrici”, așa cum i-a numit marele matematician Henri Poincaré, după ce și-au finalizat misiunea, au căzut practic în uitare. Puținii care au rămas în textele moderne de matematică și fizică sunt exemple patologice. Până când, la mijlocul secolului XX, Benoît Mandelbrot i-a trezit din letargie pentru a întemeia geometria fractală.

Așadar, dacă vrem să povestim despre nașterea fractalilor la sfârșitul secolului al XIX-lea, trebuie să avem în vedere că acest concept nu exista încă și că diferiții exploratori ai acelei *terra incognita* căutau monștri din motive diferite. După acest avertisment, putem începe călătoria noastră specială cu primii exploratori și descoperirile lor monstruoase.

Mulțimea lui Cantor

„Mulțimea lui Cantor poate fi considerată ca intermediară dintre punct și linie: este o mulțime «cu multe lacune», de lungime zero, are la fel de multe puncte ca $\mathbb{R}$, este autosimilară (adică fiecare din părțile sale, observate cu o lupă adecvată reproduc în adevăratul sens, întreaga mulțime). Este un ansamblu de utilități dovedite în topologie (foliații, teoria finalurilor), sisteme dinamice (teoria ergodică), teoria măsurătorilor, algebră (fracții continue)... și este o sursă continuă de contraexemple.”

(Marta Macho Stadler, 1962)

Mulțimea lui Cantor își ia numele de la faimosul matematician german **Georg F.L.P. Cantor** (1845-1918), care în 1883 a prezentat-o drept exemplu topologic cu un ansamblu de proprietăți surprinzătoare. Dar, în realitate, adevăratul său creator a fost **Henry John Stephen Smith** (1826-1883), profesor de geometrie de la Oxford, care a construit-o în 1875.



Figura 2. Henry John Stephen Smith (1826-1883), creatorul Mulțimii lui Cantor.

Mulțimea lui Cantor este cel mai vechi fractal despre care știm cu certitudine. Pentru a-l genera geometric, procedăm după cum urmează: separăm, pasul $n = 0$, de un segment de mărime unitară, $S_0 = [0, 1]$, așa cum se arată în figura 4. Împărțim segmentul în trei subsegmente de mărime $1/3$. Îl ștergem pe cel central și păstrăm intervalele închise rămase:

$$S_{11} = \left[0, \frac{1}{3} \right] \quad S_{12} = \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$$



Figura 3. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), cel care a făcut-o faimoasă în topologie.

Așa obținem mulțimea de la pasul $n = 1$ din figură. Repetând separarea în trei părți pentru fiecare dintre aceste două subsegmente

și ștergând din nou fragmentul central al fiecăruia dintre ele, obținem cele patru intervale următoare ($n = 2$ în figura 4):

$$S_{21} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \quad S_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \quad S_{23} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \quad S_{24} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

toate de lungime $1/9$.

Privim cu atenție șirul lungimilor: începem cu un segment S_0 de lungime 1 și, după divizare și ștergere, avem două segmente, S_{11} și S_{12} , fiecare de lungime $1/3$. La pasul numărul 2, aveam $2^2 = 4$ segmente ($S_{21}, \dots, S_{24}$) de lungime $1/3^2 = 1/9$ fiecare. Dacă repetăm procesul de divizare în trei subsegmente egale și îl ștergem pe cel central, la pasul n avem 2^n intervale închise ($S_{n1}, S_{n2}, \dots, S_{n2n}$), fiecare dintre ele de lungime $1/3^n$.

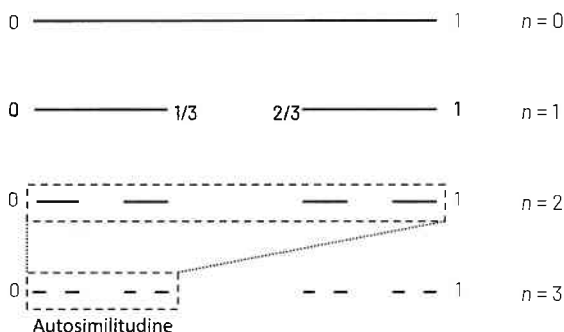


Figura 4. Primele trei iterații ale construcției mulțimii lui Cantor pornind de la un segment de lungime 1 și un indiciu vizual al autosimilarității sale: dacă înmulțim cele patru segmente din stânga cu 3 în iterația $n = 3$, recuperăm construcția completă a iterației anterioare.

După pași infiniți, vom obține submulțimea numerelor reale pe care le numim „mulțimea lui Cantor sau praful lui Cantor” și pe care, pentru scurtă durată, o vom denumi începând de acum „C”.

Înregistrând șirul numărului de segmente eliminate, împreună cu respectivele lor lungimi în iterații succesive, vom obține tabelul 1.

Iterație	Număr de segmente eliminate	Lungimea fiecărui segment eliminat
0	0	0
1	1	1/3
2	2	1/9
3	4	1/27
...	...	...
n	$2^n - 1$	$1/3^n$

Tabelul 1.

Lungimea totală a segmentelor eliminate pentru a obține C făcând ca n să tindă spre infinit, va fi:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Așa cum a subliniat topologista Marta Macho în citatul de la început, C este o mulțime „cu multe lacune”, atât de multe încât „lungimea ei este zero”. Dar apoi, după ce se șterg atât de multe intervale, mai rămâne ceva sau nu? Matematicienii spun că mulțimea C are măsură zero. Observăm că intervalele șterse sunt deschise; adică nu eliminăm punctele finale. Când ștergem intervalul $(1/3, 2/3)$, la pasul $n = 1$, de exemplu, se păstrează punctele $1/3$ și $2/3$, capetele intervalului șters. Așadar, capetele intervalului nu sunt niciodată eliminate. Putem concluziona că mulțimea C nu este goală, deoarece îi aparțin puncte precum $0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9 \dots$

Există mai multe puncte în $\mathbb{C}$ decât extremele segmentelor șterse? Ei bine, împotriva intuiției noastre, răspunsul este da. Să folosim pentru a demonstra reprezentarea numerelor reale în baza 3, notația ternară în locul zecimalului. În sistemul zecimal, atunci când scriem 0,238, înseamnă: $2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$. Putem exprima expansiunea zecimală a oricărui număr x al intervalului $[0, 1]$ ca:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

unde cifrele a_n pot fi: 0, 1, ..., 8 sau 9. În baza ternară cifrele a_n pot fi 0, 1 sau 2 și putem reprezenta un număr x din intervalul $[0, 1]$ ca:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

În acest fel, numărul zecimal $1/3 = 0,333\ldots$ în bază ternară se scrie, pur și simplu, ca 0,1; și $2/3 = 0,666\ldots$ ca 0,2. Rețineți că notația zecimală este ambiguă pentru anumite valori; acesta este cazul lui $1/10$, care poate fi exprimat ca 0,1 sau 0,0999... Același lucru se întâmplă în notația ternară: $0,1 = 0,0222\ldots$. Notația ternară este convenabilă în contextul nostru, deoarece ne permite să determinăm foarte ușor apartenența unui număr la intervalele pe care le eliminăm. De exemplu, la pasul $n = 1$, creăm trei subintervale. Toate numerele subintervalului $[0, 1/3]$ au ca primă zecimală un 0 în notație ternară (inclusiv capătul $1/3$ pe care în ternar îl putem reprezenta cu 0,0222... așa cum am comentat). Toate numerele din intervalul $(1/3, 2/3)$ au ca primă zecimală un 1 în notație ternară și 2 cele din intervalul $[2/3, 1]$, inclusiv valoarea extremă 1 a cărei reprezentare ternară poate fi scrisă ca 0,222... Așadar, atunci când ștergem subintervalul central $(1/3, 2/3)$, eliminăm toate acele puncte din $[0, 1]$ care au cifra 1 ca primă zecimală în reprezentarea lor ternară. În a doua iterație,

eliminăm în același mod toate punctele care au în reprezentarea lor ternară cifra 1 în a doua zecimală și așa mai departe în fiecare etapă. După o iterație infinită, vor supraviețui doar acele puncte care nu au cifra 1 în nicio poziție a reprezentării lor ternare. Adică, C este alcătuit din toate zecimalele ternare posibile din segmentul de unitate alcătuit din combinații ale cifrelor $a_n = 0$ și 2 .

Sunt ele mai mult sau mai puțin decât punctele extreme despre care am vorbit mai devreme? Capetele intervalelor au infinite cifre consecutive 0 sau 2 de la o anumită poziție. Dar există și alte posibilități, cum ar fi: 0,020 022 000 222 000 022 22... de exemplu. Să luăm numărul $1/4$. Această valoare nu este un punct final al unuia dintre intervalele eliminate (4 nu este o putere a lui 3). Extinderea sa zecimală ternară constă exclusiv din cifrele 0 și 2, după cum se poate calcula. Prin urmare, nu este sfârșitul unui interval șters și nu va fi eliminat.

Dacă mulțimea lui Cantor ar fi fost formată doar din valorile extreme despre care vorbeam, atunci le-am putea enumera, deoarece putem enumera iterațiile și fiecare salvează un număr finit din acestea. Putem apoi enumera toate punctele din mulțimea C ? În cele din urmă, câte puncte există în C ? A răspunde la această întrebare înseamnă a spune câte valori zecimale ternare pot fi reprezentate fără a utiliza cifra 1. Să folosim baza binară. Să presupunem că reprezentăm toate numerele reale din intervalul $[0, 1]$ ca zecimale în baza binară. În acest caz, cifrele pot fi doar 0 sau 1. Putem construi o bijecție între această mulțime și mulțimea tuturor zecimalelor ternare fără cifra 1. Este suficient să atribuim fiecărei zecimale binare o ternară prin metoda înlocuirii fiecărei cifre 1 cu cifra 2 (figura 5). Deci, nu numai că rămân puncte, dar suma lor este nenumărabilă! După cum a anticipat Marta Macho, C „are la fel de multe puncte ca R ” (vezi casetă „Cu cât este egal $C + C$?”, la pagina 15).

Mulțimea lui Cantor prezintă în mod clar proprietatea cea mai caracteristică a fractalilor: autosimilaritatea. Am văzut că fiecare punct x în C poate fi exprimat în notație ternară ca $x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} \dots$, unde a_n poate lua doar valorile 0 și 2.

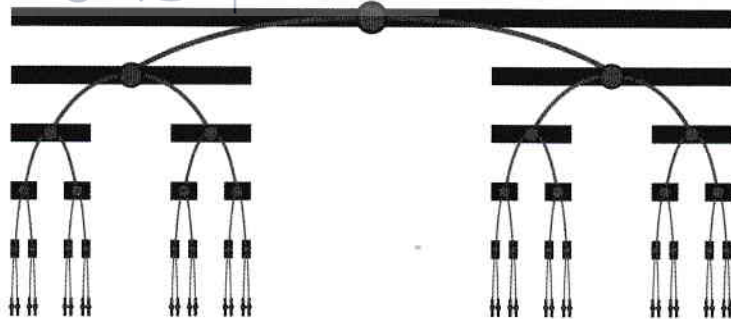


Figura 5. După cum se vede în imagine, fiecare punct al mulțimii lui Cantor este determinat și localizat de o cale infinită într-un copac binar, unde se mișcă la dreapta sau la stânga în funcție de segmentul pe care îl eliminăm. Dacă reprezentăm calea ca o bandă de cifre, în care 0 înseamnă spre stânga și 2 spre dreapta, obținem valoarea numărului din baza 3. Dacă pentru fiecare număr din C din notația ternară schimbăm cifrele 0 și 2 cu 0 și 1 și apoi interpretăm numărul în notație binară, vom fi creat o bijecție între punctele lui C și fiecare dintre punctele intervalului $[0, 1]$.

Putem găsi pentru fiecare x o valoare din C în intervalul $[0, 1/3]$ pur și simplu împărțind la 3: $x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + \dots$, pentru a face acest lucru, pur și simplu adăugați un 0 și deplasați toate cifrele. Așadar, dacă înmulțim cu 3 toate punctele din C în $[0, 1/3]$, recuperăm toate elementele C din $[0, 1]$. În același mod, dacă luăm punctele lui C din intervalul $[0, 1/3^n]$ și îl extindem de 3^n ori, vom obține din nou mulțimea lui Cantor. De fapt, din oricare dintre subintervale, oricât de mici ar fi, putem prelua C multiplicând corespunzător. Precum explica Marta Macho, „Fiecare dintre părțile sale, observate cu o lupă adecvată, reproduc într-un anumit sens întregul total”. În fiecare parte a mulțimii C este conținută informația întregului.

CU CÂT ESTE EGAL $C + C$?

C a fost construit de Cantor pentru a demonstra că există o submulțime compactă nevidă a mulțimii numerelor reale neconexă și, în același timp, densă. Mai târziu, s-a demonstrat că toate mulțimile cu aceste caracteristici sunt homeomorfe, echivalente din punct de vedere topologic. Cantor a creat o mulțime de numere ale intervalului $[0,1]$ de măsură zero care, în același timp, nu era numărabilă, cardinalul său era identic cu cel al intervalului $[0,1]$. Mulțimea este o încântare pentru topologi: este complet neconexă, închisă și perfectă.

Dacă tot ce ați văzut despre C vi se pare ciudat, veți fi și mai surprinși de rezultatul adunării tuturor perechilor posibile de numere aparținând lui C . Dacă am aduna toate perechile posibile de numere în intervalul $[0,1]$ am obține intervalul $[0,2]$. Ce vom obține dacă adunăm toate perechile posibile de numere din C ? Cu alte cuvinte, ce ne va da $C + C$? Dacă adunăm un punct x aparținând lui C cu un alt punct arbitrar și tot din C , vom avea în notație ternară că:

$$z = x + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$$

Amintim că atât x , cât și y au doar cifrele 0 sau 2 în expansiunile lor ternare. Cu toate acestea, deoarece $c_n = a_n + b_n$, numărul z poate avea și 1 în expansiunea sa, deoarece sumele $2 + 2$ produc altele. Dar asta înseamnă că z poate fi orice număr din intervalul $[0,1]$. Așadar, în mod surprinzător, $C + C = [0,1]$.

Triunghiul lui Sierpiński

„Marele matematician polonez Wacław Sierpiński era îngrijorat deoarece
pierduse o valiză din bagajele sale de călătorie:

— Nu, dragule! – i-a spus soția sa – Toate cele șase valize sunt aici.

— Nu se poate, răspunse Sierpiński.

Le-am numărat de mai multe ori: zero, unu, doi, trei, patru și cinci.”

(John Conway și Richard Guy în Cartea numerelor)



Figura 6. Wacław
Franciszek Sierpiński
(1882–1969).

Matematicianul polonez **Wacław Franciszek Sierpiński** (1882-1969) a publicat 50 de cărți și peste 700 de articole. Pe lângă faptul ca era prolific, interesele sale erau vaste: topologie, teoria mulțimilor, teoria numerelor, teoria funcțiilor... El a dat primul exemplu de număr absolut normal și a participat în calitate de criptograf la războiul polono-sovietic (1919-1921), deciptând mesaje în limba rusă. Cu toate acestea, popularitatea sa se datorează creației a trei fractali care îi poartă numele: triunghiul, covorul și curba lui Sierpiński.

Sierpiński a prezentat lumii triunghiul în 1915. Să ne uităm la figura 7, de la pagina 17. Începem (iterație $n = 0$) de la suprafața unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1. În continuare (iterația $n = 1$), luăm mijlocul fiecărei laturi și construim din ele un nou triunghi echilateral inversat cu latura $1/2$. Îl decupăm și obținem astfel al doilea triunghi din figură cu o gaură albă. Acum (iterația $n = 2$), repetăm procesul cu fiecare dintre cele trei triunghiuri negre cu latura $1/2$ care ne rămân. Așa că decupăm, de data aceasta, trei triunghiuri inversate cu latura $1/4$. Dacă repetăm la infinit procesul, obținem fractalul clasic cunoscut sub numele de triunghiul lui Sierpiński.